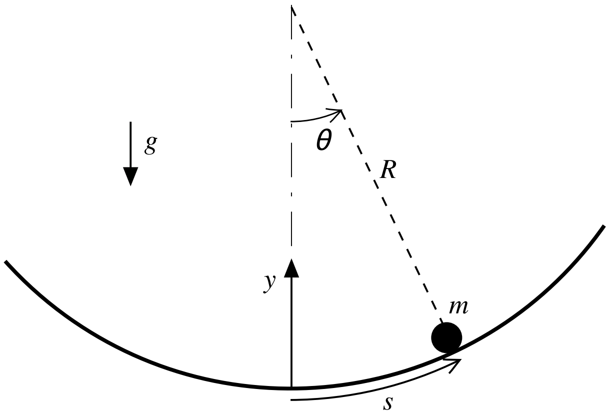
Tentamen
Mechanica & Relativiteit 2011–2012 (deel klassieke mechanica)
30 januari 2012

Opgave 1 Een kogel met massa m kan wrijvingsloos glijden in een cirkelvormige goot met straal R. De positie van de kogel wordt gemeten met de booglengte $s = R\theta$, met θ de hoek t.o.v. de verticale as.



a. Bereken de kinetische energie van de kogel, $K(\dot{\theta})$ [let op de dimensies!].

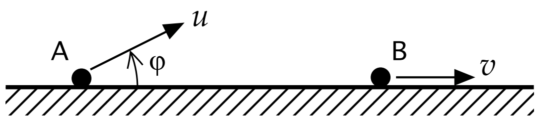
b. Toon aan dat de potentiële energie van de kogel als gevolg van de zwaartekracht (versnelling g) bij kleine uitwijkingen θ (‡) in dezelfde vorm geschreven kan worden als die van een lineaire veer, namelijk $V(\theta) = \frac{1}{2}k\theta^2$.
Druk de "veerconstante" k uit in de gegeven grootheden.

c. Wanneer de kogel zonder beginsnelheid uit de positie $\theta(0) \equiv \theta_0$ wordt losgelaten, zal deze rondom de evenwichtstand $\theta = 0$ een harmonische beweging maken. Leidt de bewegingsvergelijking af door gebruik te maken van het feit dat op ieder tijdstip de energie $E = K + V$ constant is.
Toon aan dat de eigenfrequentie gegeven wordt door $\omega = \sqrt{g/R}$.

d. Bereken de snelheid van de kogel wanneer hij de evenwichtspositie $\theta = 0$ passeert.
Vergelijk dit antwoord met de snelheid die de kogel zou hebben op dezelfde hoogte $y = 0$ (zie figuur) als hij buiten de goot vanaf $y = R(1 - \cos\theta_0)$ zou zijn gevallen.
Verklaar je antwoord.

Opgave 2 Bij diverse sporten komt het voor dat de ene speler een bal werpt naar een rennende teamgenoot. De kunst van beiden is dat deze laatste de bal opvangt. In deze opgave beschouwen we een sterk vereenvoudigd model hiervan.
Eén bal B beweegt zich met constante snelheid v langs een horizontaal vlak. Bal A wordt onder een hoek φ weggeschoten op het moment dat deze zich op een afstand d daarachter bevindt. De beginsnelheid u dient zodanig te worden bepaald dat de beide ballen elkaar raken op het moment dat A op de grond valt.

‡In dat geval: $\sin\theta \approx \theta$ en $\cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$.

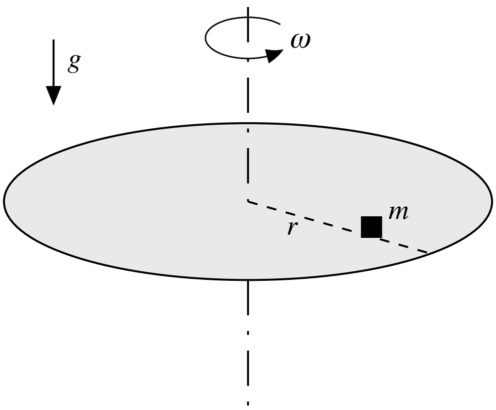


a. Bewijs dat het tijdstip t waarop bal A op de grond belandt, gegeven is door $t = (2u \sin \varphi)/g$.

b. Stel dat d gegeven is, evenals de beginsnelheid u en richting φ. Met welke snelheid v moet B bewegen om bal A op te vangen?

c. De beginafstand d is weer gegeven, maar het doel is nu om bal A zo ver mogelijk vooruit te gooien (d.w.z. naar rechts in de tekening). Echter, als v te groot is dan haalt A het misschien niet; anderzijds als d te groot is, zal B terug moeten. Aan welke relatie moeten u en v voldoen opdat de ballen elkaar toch raken?

Opgave 3 Een kever met massa m bevindt zich op een schijf die rond een verticale as draait met hoekfrequentie ω. De wrijvingscoefficient tussen blokje en schijf bedraagt μ.



a. Welke krachten ervaart de stilstaande kever (in zijn meebewegende referentiesysteem) op afstand r wanneer de schijf met constante snelheid draait? Bereken de maximale hoeksnelheid waarbij de kever niet van de schijf geslingerd wordt.

b. Benoem de krachten waaraan de kever onderhevig is als deze met constante snelheid v in radiale richting naar het middelpunt loopt. Teken deze krachten in een vrijlichaamsdiagram van de kever.

c. Als de schijf versnelt ondervindt de kever nog een andere kracht. Bereken deze en geef de richting ervan aan in een duidelijk schets.

Beoordeling:

Opgave	aantal punten
1	7
2	5
3	3

Toetscijfer = (totaal punten + 1) /1.6

Tentamen
Mechanica & Relativiteit 2011–2012 (deel klassieke mechanica)
30 januari 2012

Opgave 1

a. Snelheid is $v = R\dot{\theta}$, dus $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(R\dot{\theta})^2$. $\boxed{1}$

b. Het antwoord $k = mgR$ kan op diverse manieren worden verkregen:

- Gebruik maken van de zwaartekrachtspotentiaal $V = mgy$ met $y \approx \frac{1}{2}R\theta^2$
- Integratie van de terugstellende kracht $F = -mg\theta$ over de afstand $R\theta$ tot een potentiaal $V(\theta)$.

$\boxed{2}$

c. Omdat $E = \frac{1}{2}m(R\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}k\theta^2$ constant is, is $\dot{E} = 0$, d.w.z.

$$\dot{\theta}\left(mR^2\ddot{\theta} + k\theta\right) = 0$$

Tenzij de kogel niet beweegt, moet de beweging voldoen aan $mR^2\ddot{\theta} + k\theta = 0$, de harmonische vergelijking met eigenfrequentie $\omega = \sqrt{k/(mR^2)} = \sqrt{g/R}$. $\boxed{2}$

d. Uit de trillingsvergelijking $\theta = \theta_0 \cos\omega t$ volgt dat de grootte van de snelheid op $\theta = 0$ gegeven is door $v = R|\dot{\theta}| = R\omega\theta_0 = \theta_0\sqrt{gR}$. Voor een vrijvallende kogel geldt $y(t) = R(1 - \cos\theta_0) - \frac{1}{2}gt^2$, zodat op het tijdstip dat $y = 0$:

$$|\dot{y}| = g\sqrt{\frac{2R(1 - \cos\theta_0)}{g}}$$

Voor kleine θ_0, reduceert dit laatste tot $|\dot{y}| \approx \theta_0\sqrt{Rg}$ hetgeen gelijk is aan de snelheid van de kogel *in* de goot, simpelweg als gevolg van behoud van energie. $\boxed{2}$

Opgave 2

a. De gevraagde tijd is twee maal de tijd tot de maximale hoogte, welke gelijk is aan $v_{\text{verticaal}}/g$. Met $v_{\text{verticaal}} = u\sin\varphi$ volgt het gestelde. $\boxed{1}$

b. Opvangen als $d + vt = v_{\text{horizontaal}}t = ut\cos\varphi$, dus

$$v = u\cos\varphi - d/t = u\cos\varphi - gd/(2u\sin\varphi)$$

$\boxed{2}$

c. De afgelegde horizontale weg van A is $ut\cos\varphi = u^2/g\sin 2\varphi$, welke maximaal is als $\varphi = 45°$ en dan u^2/g bedraagt. Voor deze waarde van φ is de benodigde snelheid van B, volgens antwoord (b), gelijk aan

$$v = \frac{1}{2}\sqrt{2}u\left(1 - \frac{gd}{u^2}\right)$$

Als $d > u^2/g$ is B te ver en zal terug moeten komen, d.w.z. $v < 0$. $\boxed{2}$

Opgave 3

a. (i) zwaartekracht mg; (ii) wrijvingskracht als gevolg van schijf $F_w < \mu mg$; (iii) centrifugale kracht $F_{\text{Cent}} = m\omega^2 r$. Centrifugale kracht kan nog net gebalanceerd worden door wrijving indien $m\omega^2 r = \mu mg$, dus maximale snelheid is $\omega = \sqrt{\mu g/r}$. $\boxed{1}$

b. Afgezien de in (a) genoemden komt daar de Coriolis kracht bij, ter grootte $F_{\text{Cor}} = 2m\omega v$ en in dit geval in de draairichting. $\boxed{1}$

c. Traagheidskracht F_{tr} van het type $-m\ddot{\mathbf{R}}$, met een versnelling die in dit geval gegeven wordt door $r\dot{\omega}$. De kracht $F_{\text{tr}} = mr\dot{\omega}$ wijst daarmee tegen de draairichting in. $\boxed{1}$